

Nom du cours : Interaction matière-rayonnement

Interaction matière-rayonnement
Partie « Processus dissipatifs »

Cursus/option : 2^{ème} année
Date de mise à jour : avril 2016
Année scolaire : 2015/2016 Auteur : Denis Boiron

Chapitre 1

Introduction - Modèles déjà étudiés

1.1 Contenu du cours

1.1.1 Buts

Le but de cette partie du cours d'interaction matière-rayonnement est de modéliser l'interaction d'un faisceau lumineux sur un ensemble d'atomes afin de comprendre comment évoluent les paramètres de la matière *et* de la lumière. On fera un traitement quantique de la matière et un traitement classique de la lumière (considérée donc comme une onde et pas comme un ensemble de photons). Comme le montre les modèles de la section 1.2, on a déjà abordé dans différents cours (*Physique atomique, Electromagnétisme, Laser*) ce problème, mais les résultats ne sont pas concordants. On cherche ici une approche quantique qui contient le « *meilleur* » de ces modèles : calcul de l'indice d'un milieu, équation d'un laser, saturation des populations atomiques à forte intensité lumineuse, existence d'une solution stationnaire...

La modélisation qui sera faite dans ce cours et une première approche, valable pour des systèmes simples (atomes à deux niveaux). Une approche plus complète utilise la notion de **matrice densité et les équations de Bloch optiques** qui sont décrites dans les parcours M2 nanophysique et LOM, de même qu'un traitement quantique de la lumière.

1.1.2 Bibliographie

- Mécanique quantique/physique atomique :
- *Mécanique Quantique* de C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloe.

- *Physique atomique* de B. Cagnac et J.-C. Pebay-Peroula.
- *Quantum Mechanics* de L.I. Schiff.
- *Mécanique Quantique* de A. Messiah.
- *Mécanique Quantique* de J. Dalibard et P. Grangier (cours de l’X téléchargeable).
- interaction matière-rayonnement :
 - *Physique atomique* de B. Cagnac et J.-C. Pebay-Peroula
 - *Optique quantique 1* de A. Aspect (cours de l’X téléchargeable) ; contient tout ce qui est décrit dans ce cours, et bien plus.

1.2 Modélisations déjà étudiées

1.2.1 Mécanique quantique

Résumé cours 1A/2A

- Les cours de *Mécanique quantique* et *Physique atomique* nous ont montré qu’un système est décrit par un état $|\Psi\rangle$ dont l’évolution temporelle est donnée par l’équation de Schrödinger $i\hbar\frac{d|\Psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi\rangle$. Le Hamiltonien \hat{H} est un opérateur hermitique dont les valeurs propres sont les énergies (réelles) et les vecteurs propres les états stationnaires. Si le système est initialement dans un état stationnaire, il y reste indéfiniment.
- D’autre part, on a également vu que pour l’atome d’hydrogène, l’électron (ou les électrons pour un atome quelconque) qui gravite autour du noyau a des énergies quantifiées (valeurs discrètes).
- Finalement, on a montré que l’application d’un champ électromagnétique permet de faire des transitions entre ces niveaux d’énergie ; en première approximation ce couplage est de type dipolaire électrique.

Oscillation de Rabi

Le modèle quantique d’interaction lumière-matière qu’on a étudié en *Physique atomique* est le modèle de couplage sinusoïdal entre deux niveaux atomiques, dont on rappelle ici les résultats¹.

1. On a effectué le calcul dans le cas $\omega_0 = \omega$. Le cas que l’on traite ici est à peine plus compliqué.

On considère deux états $|f\rangle$ et $|e\rangle$ d'énergies $E_f = 0, E_e = \hbar\omega_0$. Ces deux états sont couplés via un terme dipolaire électrique $\hat{V} = -\hat{d}\cdot\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ où $\hat{d} = -e\hat{X}$ est la projection de l'opérateur dipôle sur l'axe x pour un champ électrique d'amplitude \mathcal{E}_0 dirigé suivant cette direction. Pour des raisons de symétrie, on a $\langle f|\hat{d}|f\rangle = \langle e|\hat{d}|e\rangle = 0$ et on note $\Omega = -d\cdot\mathcal{E}_0/\hbar$ avec $d = \langle f|\hat{d}|e\rangle$; Ω est appelé pulsation de Rabi.

En injectant $|\Psi(t)\rangle = \gamma_f(t)|f\rangle + \gamma_e(t)e^{-i\omega_0 t}|e\rangle$ dans l'équation de Schrödinger on trouve,

$$i\frac{d\gamma_f}{dt} = \Omega \cos(\omega t)e^{-i\omega_0 t} \gamma_e \quad (1.1)$$

$$i\frac{d\gamma_e}{dt} = \Omega \cos(\omega t)e^{i\omega_0 t} \gamma_f \quad (1.2)$$

On note $\delta \equiv \omega - \omega_0$ le **désaccord** et on se place dans la situation $|\delta| \ll \omega_0$ pour pouvoir faire l'*approximation des ondes tournantes* et trouver²,

$$\gamma_f(t) = \left(\cos(\Omega_R t/2) - i\frac{\delta}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \right) e^{i\delta t/2} \quad (1.3)$$

$$\gamma_e(t) = -i\frac{\Omega}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) e^{-i\delta t/2} \quad (1.4)$$

où $\Omega_R = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2}$ est appelé pulsation de Rabi généralisée. La population de l'état excité vaut alors

$$\Pi_e(t) = |\gamma_e(t)e^{-i\omega_0 t}|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2} \sin^2(\Omega_R t/2) \quad (1.5)$$

Cette population (et donc aussi celle de l'état fondamental) oscille indéfiniment dans le temps (aussi longtemps que l'onde lumineuse est appliquée) : c'est le phénomène d'**oscillation de Rabi** illustré sur la figure 1.1. Si on reprend le vocabulaire du cours de laser, il y a un cycle infini d'absorption-émission stimulée à la fréquence de Rabi généralisée Ω_R .

Dans l'équation 1.5, la fréquence de l'onde lumineuse est cachée dans δ , lui-même relié à Ω_R . La puissance de l'onde est reliée à l'amplitude du champ électrique et est donc compris dans Ω et Ω_R .

2. Les calculs sont plus simples si on résout les équations différentielles (indépendantes du temps) vérifiées par les fonctions auxiliaires $\tilde{\gamma}_f(t) = \gamma_f(t) e^{-i\delta t/2}$ et $\tilde{\gamma}_e(t) = \gamma_e(t) e^{i\delta t/2}$. On utilise de plus les conditions initiales $\gamma_f(0) = 1$ et $\gamma_e(0) = 0$.

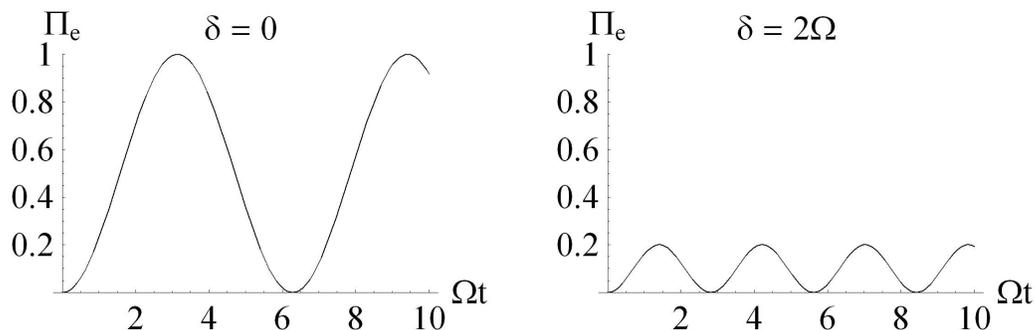


FIGURE 1.1 – Population de l'état excité Π_e en fonction du temps. On observe une oscillation, l'oscillation de Rabi. Son amplitude est maximale et sa fréquence minimale à résonance $\delta = 0$.

Emission spontanée

Le partie « résumé » indique que si on éteint l'onde lumineuse quand l'électron est dans l'état excité (par exemple, $\delta = 0, \omega t = \pi$) celui-ci y reste indéfiniment (état stationnaire). Ceci est **faux** dans la réalité : l'électron va finir par retomber dans son état fondamental en émettant de la lumière via un processus qu'on appelle émission spontanée.

On peut comprendre d'où vient l'émission spontanée en reprenant le concept de continuum vu dans le cours d'Alain Aspect. On considère comme système non plus l'électron tout seul mais le système électron + lumière et on quantifie celle-ci dans un volume de dimension R^3 très grand ($R \gg \lambda$). Il existe ainsi un grand nombre de modes électromagnétiques d'énergies très proches. Comme le couplage dipolaire électrique est permis entre $|f\rangle$ et $|e\rangle$, on se trouve donc bien dans le cas d'un couplage d'un état discret (un électron dans $|e\rangle$ et pas de photon) vers un continuum (un électron dans $|f\rangle$ et un photon d'énergie $\hbar\omega_0$ mais de direction aléatoire). Il y aura donc une transition irréversible dont le taux peut être calculé par la règle d'or de Fermi. On reviendra sur ce point dans le chapitre suivant.

Conclusion : *Ce modèle quantique donne toutes les informations sur le système atomique mais rien sur la lumière ; aucune information sur un déphasage ou absorption éventuel. Et comme indiqué précédemment, il ignore totalement l'émission spontanée.*

1.2.2 Laser

Le deuxième point de vue est celui adopté dans le cours de laser où ont été introduites les équations de taux. Ici aussi l'atome est quantifié et la lumière traitée classiquement. On trouve par exemple dans le cas d'un système à deux niveaux l'équation de taux suivante,

$$\frac{d\Pi_f}{dt} = A\Pi_e + \frac{\sigma I}{\hbar\omega}(\Pi_e - \Pi_f) \quad (1.6)$$

Le coefficient A traduit des processus de relaxation tels que l'émission spontanée : transfert possible vers un état d'énergie plus basse même en l'absence de lumière. Les autres termes sont l'éclairement I (en W/m^2), σ la section efficace d'absorption et ω la pulsation de la lumière utilisée. On interprète le terme $-\frac{\sigma I}{\hbar\omega}\Pi_f$ dans eq.(1.6) comme un taux d'absorption et $+\frac{\sigma I}{\hbar\omega}\Pi_e$ comme un taux d'émission stimulée.

Ces **équations de taux** sont suffisantes pour trouver les conditions d'apparition d'un laser (sur systèmes à 3 ou 4 niveaux) et contiennent le phénomène de saturation.

Effet laser : Si on considère une tranche de matière entre z et $z+dz$ et de section Σ (où Oz est la direction de propagation du laser), la différence de puissance du laser entre entrée et sortie est de $\Sigma[I(z+dz) - I(z)]$. Cette différence provient des échanges d'énergie dans la tranche de matière, ici $\sigma I(\Pi_e - \Pi_f)dN$ où $dN = \rho\Sigma dz$ est le nombre d'atomes dans la tranche. On en déduit donc que,

$$\frac{dI}{dz} = \sigma\rho(\Pi_e - \Pi_f)I \quad (1.7)$$

On retrouve bien un gain, donc un effet laser possible, si $\Pi_e > \Pi_f$, c'est-à-dire quand il y a inversion de population³.

Evolution temporelle et phénomène de saturation : On peut facilement résoudre eq.(1.6) si on prend un éclairement I nul pour $t < 0$ et constant pour $t > 0$. Avec $\Pi_e + \Pi_f = 1$ et $\Pi_e(0) = 0$ on obtient,

$$\Pi_e = \Pi_e^{(st.)} \left(1 - e^{-\tilde{A}t}\right) \quad (1.8)$$

3. Ce qui n'est pas possible dans notre exemple de système à deux niveaux.

avec $\tilde{A} = A + 2\frac{\sigma I}{\hbar\omega}$ et $\Pi_e^{(st.)} = (2 + \frac{A\hbar\omega}{\sigma I})^{-1}$.

La comparaison des équations (1.8) et (1.5) ou de manière équivalente des figures 1.1 et 1.2 est frappante : alors que la première prévoit une évolution monotone vers un état stationnaire, la prédiction quantique est une oscillation perpétuelle!!!!

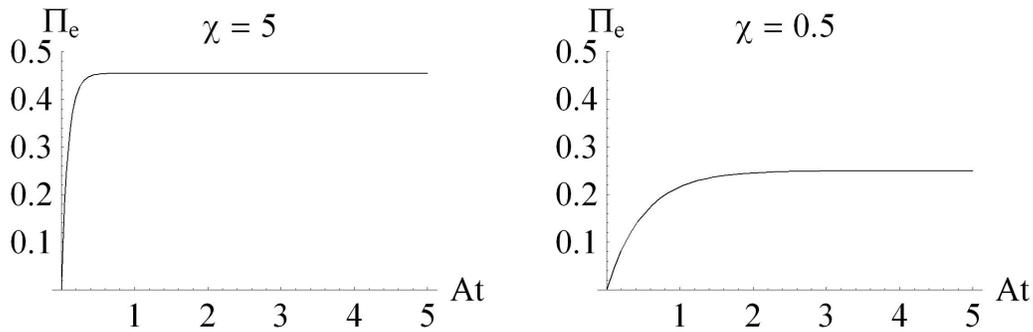


FIGURE 1.2 – Population de l'état excité Π_e en fonction du temps. On observe une évolution monotone vers un état d'équilibre, et non une oscillation comme dans le cas quantique, cf fig.1.1. On a introduit $\chi = \frac{\sigma I}{A\hbar\omega}$ tel que $\Pi_e \rightarrow 1/2$ quand $\chi \rightarrow \infty$.

De plus, la population stationnaire $\Pi_e^{(st.)}$ contient le phénomène de saturation. Quelque soit l'éclairement I , on aura toujours $\Pi_e^{(st.)} < 1/2$. De nouveau cette saturation de la population de l'état excité est en totale contradiction avec le résultat quantique car eq.(1.5) prédit qu'une population $\Pi_e = 1$ est possible!!

Conclusion : Les équations de taux ont montré toute leur utilité pour traiter les lasers et tout modèle valable doit contenir la saturation et la possibilité d'avoir du gain. Cependant, ce modèle ne tient compte que de l'intensité, pas de l'amplitude des champs électriques, donc pas de phase. On verra dans la suite de ce cours (partie optique statistique) que la largeur spectrale ultime d'un laser est cependant donnée par des fluctuations de phase ! De plus les caractéristiques atomiques sont aussi définies uniquement par leur population et non par leur amplitude de probabilité ($\Pi_f = |\gamma_f|^2$ et pas d'information sur la phase de γ_f). Ces équations de taux sont donc elles aussi insuffisantes.

1.2.3 Electromagnétisme

Il existe justement un modèle adapté pour avoir l'influence de la matière sur la lumière vu en cours 1A *Electromagnétisme* : **le modèle de l'électron élastiquement lié**. Ce modèle consiste à traiter la matière comme un ensemble d'électrons soumis chacun à une force de rappel $-m\omega_r^2 x$ autour de leur noyau respectif :

$$m\ddot{x} = -m\omega_r^2 x - m\nu\dot{x} - e\mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad (1.9)$$

où x est la position de l'électron par rapport au repos, m sa masse, $-e$ sa charge et \mathcal{E}_0 est toujours l'amplitude du champ électrique (on a pris une polarisation linéaire sur l'axe x)⁴. On rajoute dans ce modèle une force de frottement visqueux dont on verra l'utilité ci-dessous.

Si on allume le champ à $t = 0$, il apparaît un régime transitoire puis un régime forcé à la pulsation ω que l'on étudie maintenant. Il est alors pratique d'utiliser la notation complexe, $x = x_0 e^{-i\omega t}$, et il vient

$$x_0 = \frac{1}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\nu\omega} \frac{e\mathcal{E}_0}{m} \quad (1.10)$$

On observe un phénomène de résonance en $\omega = \omega_r$, de largeur ν qui rappelle la résonance du modèle quantique, cf fig.1.1 et eq.(1.5). Le terme de frottement visqueux permet de supprimer la divergence non réaliste en $\omega = \omega_r$.

Une fois que x_0 est connu, l'artillerie de l'électromagnétisme permet de remonter jusqu'à la valeur de l'indice du milieu. On trouve tout d'abord l'expression du dipole induit par la lumière, $d = d_0 e^{-i\omega t}$ où $d_0 = -ex_0$, puis la densité volumique de polarisation $P = \rho d$ où ρ est la densité de ces électrons, ensuite la susceptibilité $\chi = \frac{P}{\epsilon_0 \mathcal{E}}$ et finalement l'indice $n = \sqrt{1 + \chi}$.

Dans ce modèle, on trouve,

$$\chi = \frac{-\rho e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\nu\omega} \quad (1.11)$$

Dans la situation que l'on vient de voir, x_0 est complexe, ce qui veut dire qu'en retournant en notation réelle, $x(t)$ et donc $d(t)$ a une composante D_1 en phase avec le champ électrique et une composante D_2 en quadrature :

$$d(t) = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t) \quad (1.12)$$

4. A priori le champ est en réalité du type $\mathcal{E}_0 \cos(kz - \omega t)$ mais l'excursion z est généralement faible devant la longueur d'onde de la lumière et donc $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$

Si on décompose l'indice en partie réelle et imaginaire, $n = n' + in''$, les équations de Maxwell dans la matière indiquent alors que l'onde lumineuse se propage dans le milieu suivant l'expression,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i(kn'z - \omega t)} e^{-kn''z} \quad (1.13)$$

Il y a donc atténuation de l'onde si $n'' \neq 0$. Le cours d'électromagnétisme montre que *cette atténuation correspond à de l'absorption si la susceptibilité à une partie imaginaire non nulle, ce qui est équivalent à dire $D_2 \neq 0$* ⁵.

Conclusion : *On trouve bien ici un calcul sur la milieu (amplitude de l'oscillation x_0) et sur la lumière (calcul de l'indice, ici complexe). Par contre, les paramètres ω_r et ν sont ad-hoc. Il s'agit aussi d'un calcul complètement classique (pas de population d'état), linéaire (plus le champ est grand, plus le dipôle est grand) qui a un comportement stationnaire (pas d'équivalent à l'oscillation de Rabi⁶). Enfin la partie imaginaire de l'indice est telle que le champ ne peut être qu'atténué ; pas de gain possible, donc pas d'effet laser.*

5. On calcul pour cela la puissance dissipée par effet Joule $Re[\vec{j} \cdot \vec{\mathcal{E}}^*]/2$ où \vec{j} est la densité volumique de courant.

6. Ce point s'éclaircira dans la section 2.1.1.

Chapitre 2

Modélisation quantique de la dissipation

2.1 Retour sur le modèle quantique

2.1.1 Préliminaire

On a noté au chapitre précédent que le phénomène d'émission spontanée est totalement incompatible avec notre approche à deux niveaux de l'oscillation de Rabi¹. Un traitement exact de l'émission spontanée dépasse très largement le cadre de ce cours. On cherche donc un moyen phénoménologique de le faire. Pour cela on va reformuler les résultats de la section 1.2.1.

On avait trouvé

$$\gamma_f(t) = \left(\cos(\Omega_R t/2) - i \frac{\delta}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \right) e^{i\delta t/2} \quad (2.1)$$

$$\gamma_e(t) = -i \frac{\Omega}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) e^{-i\delta t/2} \quad (2.2)$$

La mécanique quantique permet de calculer la valeur moyenne d'un opérateur², donc en particulier de celui de l'opérateur dipole \hat{d} : $\langle \hat{d} \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{d} | \Psi(t) \rangle$.

1. Voir cependant le TD durée de vie du cours de physique atomique pour une autre approche que celle décrite ci-dessous.

2. On sait que la mesure d'un opérateur a pour résultat une des valeurs propres de l'opérateur avec une probabilité dépendant du vecteur propre correspondant et de l'état du système. On imagine être capable de répéter un grand nombre de fois la même mesure; la moyenne des résultats correspond à la valeur moyenne de l'opérateur.

Si l'état du système est décrit par son état $|\Psi(t)\rangle = \gamma_f(t)|f\rangle + \gamma_e(t) e^{-i\omega_0 t}|e\rangle$, alors la valeur moyenne de \hat{d} vaut

$$\begin{aligned}\langle \hat{d} \rangle &= d(\gamma_f^* \gamma_e e^{-i\omega_0 t} + \gamma_f \gamma_e^* e^{i\omega_0 t}) = 2d \operatorname{Re} [\gamma_f^* \gamma_e e^{-i\omega_0 t}] \quad (2.3) \\ &= 2d \operatorname{Re} \left[\frac{\Omega}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \left(-i \cos(\Omega_R t/2) + \frac{\delta}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \right) e^{-i\omega t} \right] \quad (2.4)\end{aligned}$$

On voit ainsi que $\langle \hat{d} \rangle$ peut être écrit sous la forme

$$\langle \hat{d} \rangle = d \operatorname{Re} [(u + iv)e^{-i\omega t}] = d[u(t) \cos(\omega t) + v(t) \sin(\omega t)] \quad \text{où } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.5)$$

On obtient donc une analogie entre (du, dv) et (D_1, D_2) introduit dans le modèle électromagnétique, cf eq.(1.12). La seule différence par rapport au modèle électromagnétique est que u et v dépendent du temps contrairement à D_1 et D_2 (d'où la terminologie stationnaire utilisée dans le chapitre précédent pour le modèle de l'électron élastiquement lié).

Notez que la fréquence ω_0 dans eq.(2.3) s'est « transformée » en ω dans eq.(2.5). C'est évidemment ce qu'on attend car le dipôle est induit par le champ externe et donc « oscille » à la fréquence de celui-ci et pas à la fréquence propre de l'atome ω_0 .

2.1.2 Equations sur u, v et w

En utilisant eq.(2.5), on trouve les expressions suivantes pour u et v :

$$u = 2 \frac{\delta \Omega}{\Omega_R^2} \sin^2(\Omega_R t/2) = \frac{\delta \Omega}{\Omega_R^2} [1 - \cos(\Omega_R t)] \quad (2.6)$$

$$v = -2 \frac{\Omega}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \cos(\Omega_R t/2) = -\frac{\Omega}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t) \quad (2.7)$$

Plus important, on est capable de trouver des équations reliant ces deux quantités à une troisième, traditionnellement notée w qui définit la différence de population entre les niveaux,

$$w(t) = \Pi_e(t) - \Pi_f(t) \quad (2.8)$$

En utilisant les équations (2.1) et (2.2), on trouve

$$w = 2 \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2} \sin^2(\Omega_R t/2) - 1 = \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2} [1 - \cos(\Omega_R t)] - 1 \quad (2.9)$$

Par définition on a $|\gamma_e(t)|^2 + |\gamma_f(t)|^2 = 1$ (état $|\Psi\rangle$ normé), donc

$$-1 \leq w \leq 1$$

Quand l'électron est dans son état fondamental, $w = -1$, quand il est dans son état excité, $w = +1$.

On trouve sans difficulté des équations très simples pour le triplet (u, v, w) :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\delta v \\ \frac{dv}{dt} = \delta u + \Omega w \\ \frac{dw}{dt} = -\Omega v \end{cases} \quad (2.10)$$

Ces équations ne comportent aucune approximation et sont équivalentes à la solution quantique en termes de γ_e et γ_f .

2.2 Equations de Bloch avec dissipation

2.2.1 Vecteur de Bloch - équation de Bloch

Il se trouve que le système d'équations 2.10 est adapté pour introduire phénoménologiquement les termes d'émission spontanée ou plus généralement tout terme de relaxation/dissipation.

On appelle équations de Bloch avec dissipation les équations suivantes

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\delta v - \gamma_d u \\ \frac{dv}{dt} = \delta u + \Omega w - \gamma_d v \\ \frac{dw}{dt} = -\Omega v - \gamma_p (w - w_0) \end{cases} \quad (2.11)$$

Au lieu d'écrire l'équation différentielle sur w , on peut l'écrire sur Π_e car $\Pi_e + \Pi_f = 1$,

$$\frac{d\Pi_e}{dt} = -\frac{\Omega}{2}v - \gamma_p\Pi_e + \frac{\gamma_p}{2}(w_0 + 1) \quad (2.12)$$

qui a une certaine ressemblance avec l'équation de taux (1.6) du chapitre précédent. On reviendra sur ce point au 2.4.2.

Il est d'usage d'appeler vecteur de Bloch le triplet (u, v, w) .

On a introduit 3 quantités :

- w_0 est la valeur stationnaire de w en l'absence de lumière,
- γ_d est le taux de relaxation du dipôle,
- γ_p est le taux de relaxation de la population ; dans la plupart des cas on a $\gamma_p \neq \gamma_d$ et très souvent $\gamma_p \ll \gamma_d$.

Remarques :

- On n'a pas introduit de termes u_0, v_0 . C'est normal car sans lumière il n'y a pas de dipôle induit et donc $u_0 = v_0 = 0$.
- C'est le rajout des termes de relaxation qui impliquent l'existence d'un état stationnaire. Celui-ci correspond à,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{st} = -\delta\Omega \alpha \\ v_{st} = \gamma_d\Omega \alpha \\ w_{st} = (\delta^2 + \gamma_d^2) \alpha \\ \text{avec } \alpha = \frac{\gamma_p w_0}{\gamma_p(\delta^2 + \gamma_d^2) + \gamma_d\Omega^2} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

- On retrouve le phénomène de saturation vu au 1.2.2 : si $\Omega \rightarrow \infty$, alors $\alpha \rightarrow 0$ et donc $w_{st} \rightarrow 0, \Pi_e \rightarrow 1/2$.
- On verra au 2.4 que dans la limite $\gamma_d \gg \gamma_p$, les équations ci-dessus redonnent bien les équations de taux de 1.2.2.

Ainsi notre modélisation remplit son contrat : équations reliant l'amplitude du champ électrique (Ω) aux amplitudes de probabilités atomiques (via le dipole), équations redonnant la saturation et les équations de taux (cf plus bas), ainsi que la valeur (réelle et imaginaire) de l'indice. Il reste à trouver des valeurs pour w_0, γ_p, γ_d . C'est l'objet de la prochaine section.

2.2.2 γ_d, γ_p et w_0

Paramètre w_0 :

- w_0 correspond à la différence de populations entre état excité et fondamental en l'absence de lumière. Ainsi, en l'absence d'un autre processus comme le pompage, l'état initial sera l'état fondamental et donc $w_0 = -1$.
- Quand on voudra revenir sur le cas d'un laser, il faudra mettre du pompage dans le modèle. On retrouvera que pour avoir du gain il faut $w_0 > 0$ c'est-à-dire une inversion de population.

Paramètres de relaxation :

- On étudiera principalement le cas de l'émission spontanée. Un calcul quantique complet montre qu'alors $\gamma_p = 2\gamma_d = \Gamma$ où Γ est appelée largeur naturelle du niveau $|e\rangle$. Pour la plupart des niveaux excités accessibles par laser depuis l'état fondamental, $\Gamma \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$.
- Dans la pratique il y a bien d'autres canaux de relaxation : collision dans les milieux gazeux, vibration dans les milieux solides et de plus ces relaxations sont souvent inhomogènes : impuretés, contraintes mécaniques dans les solides ou effet Doppler dans les gaz.
- Il est facile de se convaincre que la phase est une quantité beaucoup plus fragile que la population et que donc dans la quasi-totalité des cas pratiques on aura $\gamma_d \gg \gamma_p$ (voir section 2.4). L'émission spontanée est de ce point de vue un cas très particulier.

2.3 Cas de l'émission spontanée

Comme les remarques précédentes l'indiquent, le cas de l'émission spontanée est un peu atypique ; il correspond cependant assez bien à ce qui se passe dans les milieux gazeux (cf TD pour l'influence de l'effet Doppler) et permet une première approche des processus dissipatifs.

On va regarder en détail le cas de l'émission spontanée avec $w_0 = -1$. Les équations de Bloch et les solutions stationnaires du vecteur de Bloch sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = -\delta v - \Gamma u/2 \\ \frac{dv}{dt} = \delta u + \Omega w - \Gamma v/2 \\ \frac{dw}{dt} = -\Omega v - \Gamma(w + 1) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{(st)} = \frac{2\delta}{\Omega} \frac{s}{1+s} \\ v_{(st)} = -\frac{\Gamma}{\Omega} \frac{s}{1+s} \\ w_{(st)} = -\frac{1}{1+s} \\ \text{avec } s \equiv \frac{\Omega^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \\ \text{le paramètre de saturation} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

2.3.1 Evolution vers un état d'équilibre

La figure 2.1 montre l'évolution temporelle de la différence de population w en fonction du temps en résolvant numériquement les équations 2.14. Cette résolution a été faite pour plusieurs valeurs de Γ afin de montrer l'effet de l'émission spontanée sur l'oscillation de Rabi (cf fig.1.1). On déduit de ces courbes que celle-ci ne décrit bien la physique que pour les temps courts, inférieurs à $1/\Gamma$; à temps long on retrouve bien une valeur stationnaire des populations. On voit aussi sur cette exemple de système à deux niveaux le phénomène de saturation ; on a choisi une fréquence de Rabi Ω élevée, ce qui conduit à une population stationnaire proche de $1/2$ tant que Γ n'est pas trop grand. La courbe $\Gamma = \Omega$ illustre le cas fréquence de Rabi « faible » et est à rapprocher de la solution équation de taux (cf fig.1.2).

2.3.2 Caractéristiques de l'état stationnaire

On a introduit dans les équations précédentes le paramètre de saturation s ; $s > 1$ indique un éclaircissement I « fort ». Comme $\Pi_e + \Pi_f = 1$, on peut aussi donner les populations stationnaires et en particulier,

$$\Pi_e^{(st)} = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \quad (2.15)$$

On voit sur eq.(2.12) que $\Gamma \Pi_e$ peut s'interpréter comme le nombre de photons spontanés par seconde, appelé taux d'émission spontanée Γ_{sp} . On trouve donc

$$\Gamma_{sp} = \Gamma \Pi_e^{(st)} = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad (2.16)$$

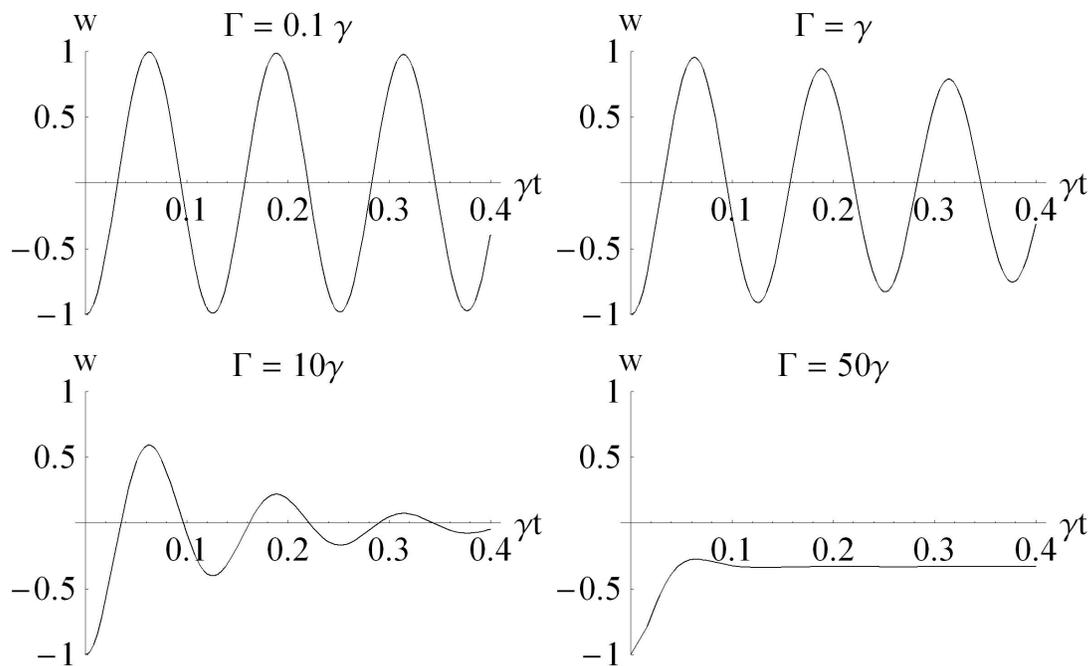


FIGURE 2.1 – Paramètre $w = \Pi_e - \Pi_f$ en fonction du temps pour différentes valeurs de la largeur naturelle du niveau excité. On voit que l’oscillation de Rabi vue au 1.2.1 s’amortit de plus en plus rapidement quand le taux d’émission spontanée augmente ; il apparaît également une valeur stationnaire à temps long. L’oscillation disparaît quand $\Omega \leq \Gamma$. Courbes tracées avec $\delta = 0$ et $\Omega = 50\gamma$.

Ce taux est relié à l’absorption du faisceau lumineux car, sans émission spontanée le nombre de photons est conservé (autant d’absorption que d’émission stimulée) et donc l’intensité du laser reste constante.

La dépendance en δ de ce taux est illustrée sur la figure 2.2 : amplitude et largeur dépendent de Ω à travers le paramètre de saturation à résonance ($s(\delta = 0) = 2\Omega^2/\Gamma^2$). Le comportement observé est naturel. L’interaction d’un laser avec un atome est très sélective. La largeur en fréquence de cette sélectivité est donnée à basse puissance lumineuse par la largeur naturelle du niveau excité ; de façon imagée cette largeur donne un « flou » sur l’écart en énergie entre état fondamental et excité. A plus haute puissance la sélectivité est moindre ; de nouveau on peut comprendre qu’à forte puissance, on peut toujours exciter la transition atomique même hors résonance. Il n’en reste pas moins que cette sélectivité est dans tous les cas pratiques toujours très bonne : sur une transition dans le visible, le facteur

de qualité « fréquence de résonance divisée par largeur de cette résonance » est de l'ordre de 10^8 ! D'où l'utilisation de ce phénomène pour asservir des lasers en fréquence (cf TD absorption saturée).

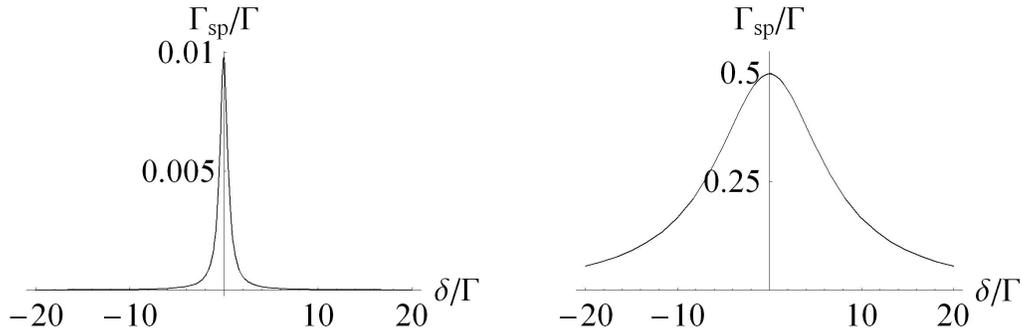


FIGURE 2.2 – Taux d'émission spontanée en fonction du désaccord δ pour deux valeurs de la fréquence de Rabi Ω . Figure de gauche, $\Omega = 0.1\Gamma$ (paramètre de saturation à résonance $s(\delta = 0) = 0.02$), figure de droite, $\Omega = 10\Gamma$ ($s(\delta = 0) = 200$). Il apparaît clairement un élargissement par saturation qui traduit le fait que Γ_{sp} a une largeur de $\sqrt{\Omega^2 + \Gamma^2/4}$ en fonction de δ .

2.3.3 Calcul de l'indice

Ayant maintenant une expression pour le dipôle via ses parties réelle (du) et imaginaire (dv), on peut reprendre la démarche de la section 1.2.3 pour calculer l'influence en retour sur le faisceau lumineux en utilisant les valeurs stationnaires pour le vecteur de Bloch.

En repassant en notation complexe comme au 1.2.3, la susceptibilité $\chi = \chi' + i\chi''$ vaut alors,

$$\rho u_{st} d = \epsilon_0 \chi' \mathcal{E}_0 \quad (2.17)$$

$$\rho v_{st} d = \epsilon_0 \chi'' \mathcal{E}_0 \quad (2.18)$$

où χ peut se mettre sous la forme $\chi = \chi_0/(1 + s)$. On fait apparaître χ_0 la susceptibilité linéaire (indépendante de l'intensité du faisceau laser), qui, en utilisant $\hbar\Omega = -d\mathcal{E}_0$, a pour expression :

$$\chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0 = \frac{\rho d^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{\delta^2 + \Gamma^2/4} (-\delta + i\Gamma/2) \quad (2.19)$$

Dans la plupart des cas qui nous intéressent, χ est faible devant 1 et on peut donc faire un calcul perturbatif pour l'indice, $n = n' + in'' = \sqrt{1 + \chi} \approx 1 + (\chi' + i\chi'')/2$, d'où

$$n' = 1 + \frac{1}{2} \frac{\chi'_0}{1 + s} \quad (2.20)$$

$$n'' = \frac{1}{2} \frac{\chi''_0}{1 + s} \quad (2.21)$$

Ces résultats appellent plusieurs commentaires :

- On obtient de façon naturelle, un indice *non-linéaire* via le paramètre de saturation s qui est lui linéaire avec l'éclairement (effet Kerr).
- Comme attendu (cf relation de Kramers-Kronig dans le cours « Electromagnétisme »), $n' - 1$ est une fonction impaire du désaccord, alors que n'' est paire et maximale à résonance. Ceci est illustré sur la figure 2.3.
- L'expression de χ_0 est identique à celle trouvée au 1.2.3, eq.(1.11) si on utilise $\nu = \Gamma/2$ et $d = er_0$ avec $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$.

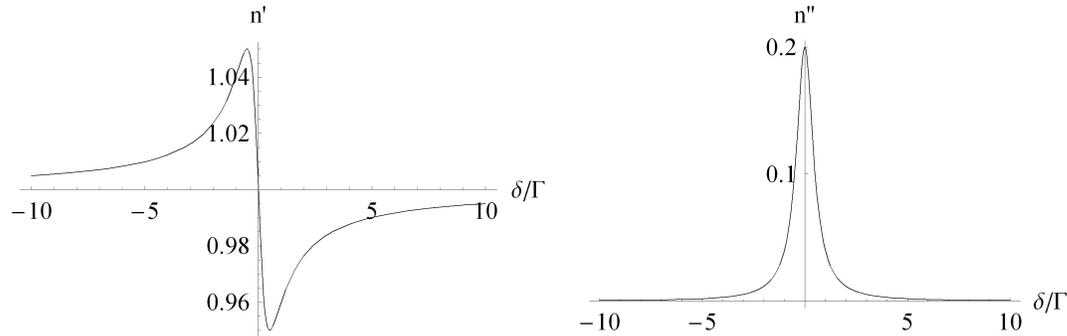


FIGURE 2.3 – *Indice du milieu dans le cas linéaire ($s \ll 1$). La figure de gauche représente la partie réelle de l'indice, celle de droite la partie imaginaire. Ces courbes ont été tracées dans le cas $\frac{\rho d^2}{\epsilon_0 \hbar} = \Gamma/10$.*

2.3.4 Section efficace d'absorption

Connaissant l'indice on peut s'intéresser à l'absorption du faisceau lumineux. Le champ électrique ayant un facteur d'atténuation en $e^{-kn''z}$, son éclairement varie comme

$$I(z) = I_0 e^{-2kn''z} \equiv I_0 e^{-\rho\sigma z} \quad \text{où } \sigma \text{ est la section efficace d'absorption.} \quad (2.22)$$

Le calcul quantique de la largeur naturelle donne, $\Gamma = \frac{d^2\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3}$, ce qui conduit à une formule très simple pour la section efficace,

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad \text{où} \quad \sigma_0 = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \quad (2.23)$$

Ainsi, à résonance, la section efficace est donc de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde au carré.

2.4 Lien avec les équations de taux et l'amplification laser

2.4.1 Amplification laser

Pour modéliser un effet laser, il faut pouvoir décrire une situation de gain. Il faut donc aussi une source extérieure d'énergie, qui dans ce cas est réalisée par un pompage. Une façon de modéliser cela dans le cadre de notre théorie est tout simplement de dire que le pompage fixe la valeur de w_0 qui sera donc différente de -1 . Si on reprend les calculs, on voit facilement que les états stationnaires pour le vecteur de Bloch se déduisent de ceux calculer plus haut avec $w_0 = -1$, eq.(2.14), en multipliant ces derniers par $-w_0$.

On en déduit immédiatement que $n'' \propto -w_0$ et qu'il est donc possible d'avoir $n'' < 0$ c'est-à-dire d'avoir du gain si $w_0 > 0$: on retrouve le critère d'inversion de population pour avoir une amplification laser.

L'amplitude \mathcal{A} du champ électrique varie comme $\mathcal{A} = \mathcal{A}(0)e^{-kn''z}$, donc

$$\frac{d\mathcal{A}}{dz} = -\frac{k\chi''}{2}\mathcal{A} \equiv g \mathcal{A}$$

avec $g = \frac{g_0}{1+s}$ le gain et g_0 le gain « petits signaux » d'expression

$$g_0 = \frac{k\rho d^2}{\epsilon_0\hbar} \frac{\Gamma w_0/4}{\delta^2 + \Gamma^2/4} = \frac{3\pi\rho}{k^2} \frac{w_0}{1 + (2\delta/\Gamma)^2}$$

2.4.2 Lien entre équation de taux et équation de Bloch

Dans le modèle du laser par équation de taux on avait trouvé

$$\frac{d\Pi_f}{dt} = -\frac{d\Pi_e}{dt} = A\Pi_e + \frac{\sigma I}{\hbar\omega}(\Pi_e - \Pi_f) \quad (2.24)$$

C'est une équation sans pompage, donc pour la retrouver on prend les équations de Bloch avec dissipation, eq.(2.12), avec $w_0 = -1$.

Dans le cas de l'émission spontanée, les taux de relaxation du dipôle et de la population ont le même ordre de grandeur, mais comme on l'a déjà signalé, dans la pratique le dipôle relaxe beaucoup plus vite que la population, $\gamma_d \gg \gamma_p$; on utilise cette condition dans la suite.

Cela veut dire que le dipôle atteindra son état (quasi-)stationnaire beaucoup plus vite que la population, ce qui conduit à faire l'approximation $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ dans eq.(2.11)³.

On en déduit une expression de v en fonction de w que l'on peut réinjecter dans eq.(2.12) pour trouver

$$\frac{d\Pi_e}{dt} = -\gamma_p \Pi_e - \frac{\gamma_d \Omega^2}{2(\gamma_d^2 + \delta^2)} (\Pi_e - \Pi_f) \quad (2.25)$$

Cette équation a exactement la même forme que l'équation de taux réécrite ci-dessus et en plus permet de trouver une expression pour la section efficace d'absorption $\frac{\sigma I}{\hbar\omega} = \frac{\gamma_d \Omega^2}{2(\gamma_d^2 + \delta^2)}$ (cf. eq.(2.23) et $I \propto \mathcal{E}_0^2$).

3. Cela revient à dire que u, v et w évoluent dans le temps, mais que u et v s'adaptent instantanément alors que w a un temps de réponse long.

Chapitre 3

Refroidissement d'atomes par laser

Jusqu'à présent on n'a envisagé l'effet de la lumière que sur les états internes de l'atome (en fait plutôt ceux de l'électron). On va voir dans ce chapitre que l'absorption et l'émission de lumière s'accompagnent aussi d'effets mécaniques c'est-à-dire d'effet sur la position et la vitesse de l'atome. On en déduira une méthode simple pour piéger et refroidir des atomes par laser. En cours de route on croquera des *forces de Langevin* vues dans le cours précédent.

3.1 Effet mécanique de la lumière sur la matière

3.1.1 Forces réactive et dissipative

Si on reprend le cadre de l'électron élastiquement lié, section 1.2.3, l'oscillation de l'électron autour de sa position initiale était considérée comme d'amplitude faible devant la longueur d'onde et en conséquence le champ électrique $\mathcal{E}(x, t)$ était pris indépendant de la position de l'électron, $\mathcal{E}(0, t)$. Cela revient à prendre comme origine la position de l'atome.

Si l'on revient à un cadre plus général, ce champ dépendrait de $\vec{\mathbf{R}}$, la position de l'atome (à ne surtout pas confondre avec la position relative de l'électron autour du noyau atomique) et l'interaction dipolaire électrique s'écrit alors

$$V = -\vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{\mathbf{R}}, t)$$

Ce terme dépendant de $\vec{\mathbf{R}}$ peut être interprété comme une *énergie potentielle* et en conséquence on peut définir une force agissant sur l'atome

$$\vec{\mathbf{F}} = -\text{grad}_{\vec{\mathbf{R}}} V$$

On se place dans la suite du cours dans le cas où le champ est polarisé linéairement, monochromatique, mais pas nécessairement une onde plane. On l'écrit sous la forme

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{\mathbf{R}}, t) = \mathcal{E}_0(\vec{\mathbf{R}}) \cos[\omega t - \phi(\vec{\mathbf{R}})] \vec{\mathbf{e}}_x$$

La force s'écrit alors

$$\vec{\mathbf{F}} = d_x \cdot \left\{ \cos[\omega t - \phi(\vec{\mathbf{R}})] \vec{\mathbf{grad}}_{\vec{\mathbf{R}}} \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0 \sin[\omega t - \phi(\vec{\mathbf{R}})] \vec{\mathbf{grad}}_{\vec{\mathbf{R}}} \phi \right\}$$

On va admettre que la version quantique de ce calcul ¹ donne

$$\vec{\mathbf{F}} = \langle \hat{d}_x \rangle \cdot \left\{ \cos[\omega t - \phi(\vec{\mathbf{R}})] \vec{\mathbf{grad}}_{\vec{\mathbf{R}}} \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0 \sin[\omega t - \phi(\vec{\mathbf{R}})] \vec{\mathbf{grad}}_{\vec{\mathbf{R}}} \phi \right\} \quad (3.1)$$

où $\langle \hat{d}_x \rangle = d_x \cdot \left\{ u \cos[\omega t - \phi(\vec{\mathbf{R}})] + v \sin[\omega t - \phi(\vec{\mathbf{R}})] \right\}$ avec u et v les paramètres du vecteur de Bloch dépendant a priori de $\vec{\mathbf{R}}$ et du temps ². Si on remplace cette expression du dipole moyen dans eq.(3.1) il apparaît des termes en \cos^2, \sin^2 et $\sin \cos$ qui oscillent tous très vite avec le temps ($\omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$). Comme l'atome est massif, il ne peut pas être sensible à des échelles de temps aussi courtes et donc on peut légitimement remplacer les termes en \cos^2 et \sin^2 par $1/2$ et $\sin \cos$ par 0 ³. Dans les cas que nous allons traiter le mouvement de l'atome sera toujours lent par rapport à la dynamique sur les états excité et fondamental (voir section 3.2) et on remplacera alors u et v par leur valeur stationnaire respective, dépendante de la position $\vec{\mathbf{R}}$. On aboutit alors à

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{reac.}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{dissip.}} \\ \vec{\mathbf{F}}_{\text{reac.}} = \frac{d_x}{2} u_{st} \vec{\mathbf{grad}} \mathcal{E}_0 \\ \vec{\mathbf{F}}_{\text{dissip.}} = \frac{d_x}{2} v_{st} \mathcal{E}_0 \vec{\mathbf{grad}} \phi \end{array} \right. \quad (3.2)$$

La force $\vec{\mathbf{F}}_{\text{reac.}}$ est proportionnelle à u et est appelée force réactive; la force $\vec{\mathbf{F}}_{\text{dissip.}}$ est proportionnelle à v et est appelée force dissipative.

1. Pour cela on quantifie position et impulsion. Le Hamiltonien \hat{H} est alors la somme de l'énergie cinétique de l'atome, du couplage \hat{V} et du Hamiltonien interne de l'atome (dont $|f\rangle$ et $|e\rangle$ sont vecteurs propres d'énergie 0 et $\hbar\omega_0$). La force est alors définie comme $\vec{\mathbf{F}} = \langle \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} \rangle$ qui se calcule en utilisant l'équation de Heisenberg $\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \vec{\mathbf{P}}]$.

2. La quantité d_x est ici l'élément de matrice de l'opérateur \hat{d}_x entre les vecteurs propres des états $|f\rangle$ et $|e\rangle$. Il s'agit donc d'un nombre, indépendant du temps et de l'espace.

3. Une telle procédure est équivalente à « l'approximation des ondes tournantes » utilisée pour le calcul des oscillations de Rabi par exemple.

3.1.2 Cas de l'émission spontanée - Atome lent

Dans la situation où l'émission spontanée est le seul processus dissipatif, on a

$$u_{st} = \frac{2\delta}{\Omega} \frac{s}{1+s} \quad (3.3)$$

$$v_{st} = -\frac{\Gamma}{\Omega} \frac{s}{1+s} \quad (3.4)$$

Comme $\hbar\Omega = -d_x \mathcal{E}_0(\vec{\mathbf{R}})$, Ω et s dépendent de la position de l'atome $\vec{\mathbf{R}}$. Les forces s'écrivent alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{F}}_{reac.} = -\frac{\hbar\delta}{\Omega} \frac{s}{1+s} \vec{\mathbf{grad}}\Omega = -\vec{\mathbf{grad}}U_{dip} \\ U_{dip} = \frac{\hbar\delta}{2} \ln(1+s) \\ U_{dip} \approx \frac{\hbar\delta}{2} s \text{ si } s \ll 1 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

et

$$\vec{\mathbf{F}}_{dissip.} = \frac{\hbar\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \vec{\mathbf{grad}}\phi = \hbar\Gamma\pi_e \vec{\mathbf{grad}}\phi \quad (3.6)$$

Remarques :

- $\vec{\mathbf{F}}_{reac.}$ dérive d'un potentiel appelé potentiel dipolaire; celui-ci est donc une énergie potentielle pour l'atome. Cette énergie peut être positive ou négative suivant le *signe* de $\delta = \omega - \omega_0$.
- $\vec{\mathbf{F}}_{dissip.}$, proportionnelle à la population de l'état excité, est dirigée suivant $\vec{\mathbf{grad}}\phi$.
- Si $\Omega \rightarrow \infty$, $\vec{\mathbf{F}}_{reac.} \rightarrow \infty$ mais $\vec{\mathbf{F}}_{dissip.} \rightarrow \hbar\Gamma/2 \vec{\mathbf{grad}}\phi$; on retrouve l'influence du phénomène de saturation.
- En l'absence de dissipation ($\Gamma = 0$), $\vec{\mathbf{F}}_{dissip.} = \vec{\mathbf{0}}$, mais $\vec{\mathbf{F}}_{reac.} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

3.1.3 Exemple 1 : l'onde plane

Dans le cas d'une onde plane, l'amplitude du champ électrique est constante, donc Ω et s sont constants. De plus la phase est du type $\phi = \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{R}}$.

Donc,

$$\vec{\mathbf{F}}_{reac.} = 0 \text{ et } \vec{\mathbf{F}}_{dissip.} = \Gamma\pi_e \hbar\vec{\mathbf{k}}$$

La force dissipative est aussi appelée force de pression de radiation. Elle est dirigée suivant le vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ de l'onde plane. Cette force conduit à une accélération (ou décélération) de l'atome. Elle a une interprétation physique très simple : $\Gamma\pi_e$ est le nombre de photons spontanés par seconde et donc aussi le nombre de photons absorbés par seconde⁴ et $\hbar\vec{\mathbf{k}}$ est homogène à une impulsion. Ainsi $\vec{\mathbf{F}}_{dissip.}$ apparaît comme la force résultant d'un transfert d'impulsion de la lumière vers l'atome.

Pour être plus précis, il y a transfert d'impulsion pour l'absorption, dirigée suivant $\vec{\mathbf{k}}$, pour l'émission stimulée, dirigée suivant $-\vec{\mathbf{k}}$, et pour l'émission spontanée, dirigée suivant la direction opposée à celle du photon spontané. Lors d'un cycle absorption-émission stimulée, l'impulsion de l'atome ne change donc pas, au contraire d'un cycle absorption-émission spontanée. Cependant comme la direction de l'émission spontanée est aléatoire, après un grand nombre de tels cycles, elle n'induit pas de modifications de la vitesse de l'atome⁵, au contraire de la partie absorption. La force nette est donc dirigée suivant la direction du faisceau laser.

Ordre de grandeur : Plutôt que la force, on va caractériser l'accélération, plus parlante. Celle-ci vaut $\vec{\mathbf{F}}_{dissip.}/m$ avec m la masse de l'atome. On obtient des chiffres de l'ordre de 10^5 m.s^{-2} , soit 10^4 fois l'accélération de pesanteur si on sature la transition!! La force de pression de radiation peut donc être très importante.

3.1.4 Exemple 2 : le faisceau gaussien

Si on considère un faisceau gaussien se propageant sur z , focalisé en $z = 0$ et de col w_0 , l'éclairement a pour expression,

$$I = \frac{I_0}{1 + (z/z_R)^2} e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$$

avec $w(z) = w_0\sqrt{1 + (z/z_R)^2}$ et $z_R = \pi w_0^2/\lambda$ la distance de Rayleigh. La force $\vec{\mathbf{F}}_{reac.}$ est alors non nulle. L'éclairement est maximal au niveau du col en $z = 0$.

4. En fait le nombre total de photons absorbés moins le nombre de photons émis de façon stimulée.

5. Ceci en **moyenne**. Le caractère aléatoire de l'émission spontanée fait que la force fluctue. Il se trouve qu'il s'agit d'une force de Langevin dont il faudra tenir compte dans le refroidisseur laser vu au [3.2.1](#)

Tel sera le cas aussi pour le module du potentiel dipolaire U_{dip} , cf eq.(3.5). A faible saturation, le potentiel dipolaire est proportionnel à l'éclairement et a donc aussi une forme gaussienne.

Ainsi, si $\delta > 0$, les atomes subiront une force qui les expulse du col, alors que si $\delta < 0$, les atomes y seront attirés. Cette dernière situation permet donc de piéger des atomes.

Ordre de grandeur : La profondeur du piège, $-U_{dip}(0)$, est toujours très faible, $< 10^{-24}$ J, même si on utilise des lasers de plusieurs watts focalisés sur une dizaine de microns. En unité de température, un peu plus parlante, cela donne une profondeur $< 10^{-1}$ K, ce qui montre que seuls les atomes les moins énergétiques peuvent être piégés.

3.2 Refroidissement d'atomes par laser

Nous allons voir le mécanisme le plus simple pour refroidir (diminuer la largeur de la distribution de vitesses d'un ensemble d'atomes) et piéger (diminuer la largeur de la distribution de positions d'un ensemble d'atomes). Ce mécanisme tire profit de l'effet Doppler. On se place également dans le cas d'une *faible saturation*, $s \ll 1$.

On rappelle qu'une onde en $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}-\omega t)}$ vue par un atome de vitesse \vec{v} peut s'écrire $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{v}t-\omega t)}$. Dans le référentiel de l'atome, cette onde est donc équivalente à une onde de fréquence $\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}$: c'est l'effet Doppler qui donne un son aigu quand on se rapproche d'une source sonore et grave quand on s'en éloigne.

3.2.1 Refroidissement Doppler

Dans les calculs de la section 3.1.2, la vitesse de l'atome était considérée comme « faible » ; on peut quantifier ce point avec l'effet Doppler : il fallait que $|\vec{k}\cdot\vec{v}| \ll \Gamma, \delta$. Si ces conditions ne sont pas vérifiées il suffit de remplacer ω par $\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}$ et donc δ par $\delta - \vec{k}\cdot\vec{v}$ dans les expressions de la section 3.1.2. La force de pression de radiation s'écrit alors,

$$\vec{F}_{dissip.} = \frac{\Gamma s}{2} \hbar \vec{k} \quad \text{avec} \quad s = \frac{\Omega^2/2}{(\delta - \vec{k}\cdot\vec{v})^2 + \Gamma^2/4}$$

Cette force n'est plus maximale pour $\delta = 0$ mais pour $\delta - \vec{k}\cdot\vec{v} = 0$.

Que se passe-t-il si on envoie non plus un mais deux faisceaux lumineux sur l'atome, les faisceaux étant de même fréquence mais de direction opposée (voir fig. 3.1) ?

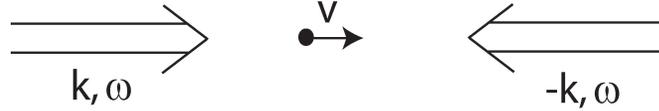


FIGURE 3.1 – Atome de vitesse \vec{v} soumis à deux faisceaux lasers contra-propageants de même fréquence.

Chacun des faisceaux exerce une force, mais si l'une dépend de $\delta - \vec{k} \cdot \vec{v}$ l'autre dépend de $\delta + \vec{k} \cdot \vec{v}$ et est de signe opposée. La force totale est donc

$$\vec{F}_{Dop.} = \left(\frac{\Omega^2/2}{(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \Gamma^2/4} - \frac{\Omega^2/2}{(\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \Gamma^2/4} \right) \frac{\Gamma}{2} \hbar \vec{k} \quad (3.7)$$

$$= \frac{\Omega^2 \delta \Gamma \vec{k} \cdot \vec{v}}{[(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \Gamma^2/4][(\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \Gamma^2/4]} \hbar \vec{k} \quad (3.8)$$

On a tracé cette force fig. 3.2 dans le cas $\delta < 0$. On voit que la force est toujours de signe opposée à la vitesse et va donc décélérer l'atome quelle que soit sa vitesse initiale. A la limite $t \rightarrow \infty$, la vitesse sera nulle. On parle de mécanisme de refroidissement Doppler.

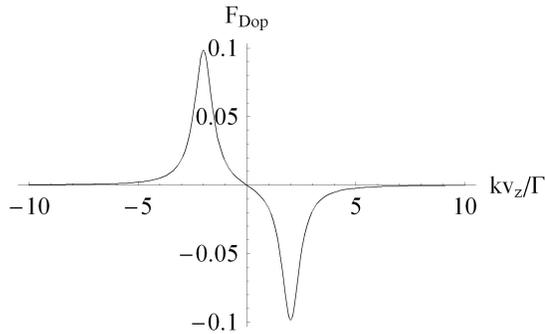


FIGURE 3.2 – Force Doppler (en unité de $\Gamma \hbar k$) en fonction de la vitesse dans le cas $\delta = -2\Gamma$ et $\Omega^2 = 0.1\Gamma^2$ pour des faisceaux contra-propageant avec $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Cette force est de signe opposée à la vitesse et est donc une force de friction (visqueuse pour les vitesses faibles).

Dans la réalité, c'est un peu plus compliqué. Si la vitesse moyenne tend bien vers 0, l'atome subissant en permanence des cycles absorption-émission spontanée,

la vitesse fluctue à cause de la direction aléatoire des photons spontanés. Un traitement de type *force de Langevin* permet de montrer que la distribution de vitesses d'un ensemble d'atomes tend vers une limite finie à temps long et peut ainsi être caractérisée par une température. La température minimale, obtenue pour $s \ll 1$ et $\delta = -\Gamma/2$ vaut,

$$T_{Dop} = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B} \quad (3.9)$$

où k_B est la constante de Boltzmann⁶. La température Doppler est de l'ordre de $10 - 100 \mu\text{K}!!$

3.2.2 Piège magnéto-optique

Une petite astuce permet de transformer la force Doppler en force qui réduit à la fois la vitesse et la position des atomes. Pour cela il faut prendre un atome un peu plus compliqué qu'un système à deux niveaux.

Prenons le cas d'un niveau fondamental $l = 0$ et un état excité $l = 1$ constitué de 3 niveaux $m_l = 0, \pm 1$ ⁷.

Cet atome est soumis à deux ondes contra-propageantes de polarisation circulaire droite et gauche, cf fig. 3.3. Les règles de sélection dipolaire électrique impose que le faisceau σ^+ fasse des transitions entre $|f\rangle$ et $|e, +1\rangle$ et le faisceau σ^- entre $|f\rangle$ et $|e, -1\rangle$.

L'atome est aussi soumis à un gradient de champ magnétique B' , qui par effet Zeeman conduit à une énergie potentielle $U_B \propto m_l g \mu_B B' z$ ⁸.

En plus de l'effet Doppler, il faut maintenant tenir compte du fait que l'énergie des états $|e, +1\rangle$ et $|e, -1\rangle$ dépend de l'espace, ce qui revient à changer ω_0 par $\omega_0 \pm g \mu_B B' z$ pour $|e, \pm 1\rangle$, qui se traduit alors par un remplacement $\delta \rightarrow \delta \mp g \mu_B B' z - kv$ dans l'expression de la force dissipative.

Pour comprendre l'effet spatial, prenons un atome de vitesse nulle. Le faisceau σ^+ aura un effet maximal en $z = z_+$ (cf figure 3.3), là où l'atome sera à résonance avec lui. Un tel atome sera donc poussé vers les z positifs quand il absorbera un photon σ^+ . Réciproquement, un atome de z positifs aura tendance à absorber un

6. $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

7. l et m_l sont les valeurs propres de \hat{L}^2, \hat{L}_z , cf chapitre moment cinétique du cours de *Physique atomique*

8. g est ici le facteur de Landé et μ_B le magnéton de Bohr, cf cours de *Physique atomique*.

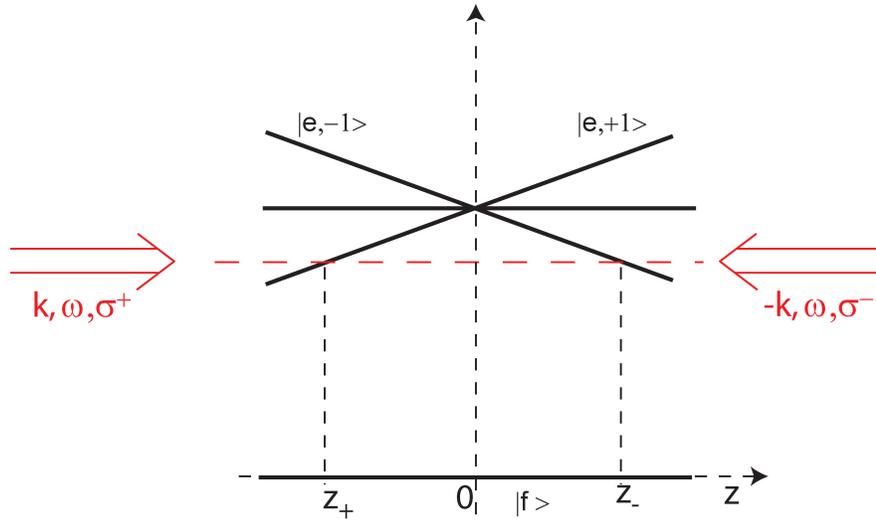


FIGURE 3.3 – Configuration de piégeage : atome soumis à deux faisceaux laser ($\delta < 0$) et un gradient de champ magnétique. La pression de radiation est maximale pour un atome de vitesse nulle en $z = z_+$ (resp. z_-) pour le faisceau polarisé σ^+ (resp. σ^-).

photon σ^- car ce faisceau est plus proche de résonance que le faisceau σ^+ . La force sera donc de signe opposée à la position z , ce qui se traduit par une force de piégeage (force de rappel à z petit).

Ainsi, la force diminue vitesse et position sur l'axe z . L'effet se produit à trois dimensions tout simplement en mettant 3 paires de faisceaux contra-propageant dans les trois directions de l'espace. On obtient ainsi un *piège magnéto-optique* capable de capturer quelques milliards d'atomes dans un volume de quelques mm^3 et à une température de quelques $100 \mu\text{K}$. Apparue à la fin des années 1980, il existe maintenant plusieurs milliers de pièges magnéto-optiques dans le monde dont quelques-uns dans le milieu industriel.